İNTEGRAL

BİR FONKSİYONUN DİFERANSİYELİ

Tanım: f: [a,b] $\to$ R, x $\to$ f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında türevli olmak üzere, x değişkeninin değişme miktarı Δx ise f '(x). Δx ifadesine f(x) fonksiyonunun diferansiyeli denir ve d(f(x)) ile gösterilir.

$$y = f(x) \to \frac{dy}{dx} = f'(x) \to dy = f'(x).\, dx \text{ tir.}$$

Y = f(x) denklemi ile verilen fonksiyonun diferansiyeli

dy = f '(x). dx tir.

Örnek

f(x) = 2x ise, d(f(x)) nedir?

Çözüm

$$\frac{d(f(x))}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow = 2\ .\ dx \text{ tir.}$$

Örnek

$$y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \text{ ise, dy nedir?}$$

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + x - 3 \Rightarrow dy = (3x^2 + x - 3)\, dx \text{ tir.}$$

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım: f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli olsun.

$F'(x) = f(x)$ ise $d(F(x)) = f'(x).\,dx$ tir.

$c \in R$ için $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ ise,

$d(F(x) + c) = f(x)\,.\,dx$ olur.

Buna göre, F(x) + c ifadesine, f(x) fonksiyonunun **"İlkeli"** veya **"Belirsiz İntegral"** denir.

UYARI: İntegral **"türevi ya da diferansiyeli"** belli olan fonksiyon nedir, sorusuna cevap olarak çıkmıştır. Türevi bilinen bir fonksiyonun, türevi alınmadan önceki halini (İlkeli) bulma işlemine, **İntegral** diyebiliriz.

BELİRSİZ İNTEGRALİN KURALLARI

a) $a \neq o$ ise $\int a.f(x)\,dx = a.\int f(x)\,dx$ tir.

b) $\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x)]\,dx$

$= \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$ tir.

TEMEL İNTEGRAL KURALLARI

Kural 1

$n \neq -1$ ise, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ($c \in R$, c sabit)

Örnek

$F(x) = \int (3x^2 + 2x - 3)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$F(x) = \int \sqrt{x}\,dx$ $(x > 0)$ integralini hesaplayınız.

Kural 2

a) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

b) $\int [f(x)]^n . f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

Örnek

$\int (x^2 + 4)^2 . (2x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \sqrt{x^2 - 2x + 3}.(2x - 2)dx$ integralini hesaplayınız.

Kural 3

a) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

b) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Örnek

$\int \dfrac{x^3 + x + 1}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \frac{2dx}{2x+3}\left(x \neq -\frac{3}{2} \right)$ integralini hesaplayınız.

Kural 4

a) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

b) $\int e^{f(x)}.f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

c) $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$

d) $\int a^{f(x)}.f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

Örnek

$\int e^{3x+1}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \left(e^{4x} + e^{2x} - e^{\frac{1}{2}x} \right)dx$ ifadesinin integralini hesaplayınız.

Kural 5

A) 1) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

2) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

B) 1) $\int \cos x dx = \sin x + c$

2) $\int \cos(ax+b) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

C) 1) $\int (1+\tan^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$

$= \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

2) $\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

D) 1) $\int (1+\cot^2 x)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$

$= \int (\operatorname{cosec}^2 x)dx = -\cot x + c$

2) $\int (1+\cot^2 ax)dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c$

Örnek

$\int(\cos 3x - \sin 2x)\, dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \tan x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$f(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int (\tan^5 x + \tan^3 x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Arcsin}\,x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\mathrm{Arccos}\,x + c$

b) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = \mathrm{Arcsin}\frac{u}{a} + c$

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = -\mathrm{Arccos}\frac{u}{a} + c$

c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Arctan}\,x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\mathrm{Arccot}\,x + c$

d) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{u}{a} + c$

$\int \frac{du}{a^2+u^2} = -\frac{1}{a}\mathrm{Arccot}\frac{u}{a} + c$

Örnek

$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$ integralini hesaplayınız.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME (DÖNÜŞÜM) YÖNTEMİ

a) $\int f(x)\,.\,dx$ integralinde $x = g(t)$ diyelim. $x = g(t)$ ise, $dx = g^{I}(t)\,dt$ dir.

$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,.\,g^{I}(t)\,dt$ yazılırsa, integral t türünden ifade edilmiş olur.

Örnek

$F(x) = \int \frac{2.(x^3+2).3x^2}{(x^3+2)^2+3} dx$ olarak tanımlıdır.

$F(-1) = \ln 2$ ise, $F(0)$ kaçtır?

Örnekler :

1. $\int (5x^2+3x+8)^{15}.(10x+3)dx$ integralini bulunuz.

2. $\int \text{Sin}^5x.\ \text{Cos}x\ dx = ?$

3. $\int \frac{2x}{x^2-1}\ dx = ?$

4. $\int e^{x^3+1}\ .\ 3x^2\ dx = ?$

5. $\int \frac{8x\ dx}{\sqrt{1-16x^4}} = ?$

6. $\int \frac{6x\,dx}{9x^4+4} = ?$

7. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = ?$

8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ?$

9 $\int 4x.\sqrt{2x^2+5}\,dx = ?$

10. $\int \text{Sin}^2x\ dx = ?$, $\int \cos^2x\ dx = ?$

11. $\int \text{Sin}^4 x\ \text{Cos}^3x\ dx = ?$

12. $\int \text{tgx}\ dx = \int \dfrac{\text{Sinx}}{\text{Cosx}}\ dx = ?$

13. $\int \text{Cotgx}\ dx = \int \dfrac{\text{Cosx}}{\text{Sinx}}\ dx$

14. $\int \frac{\text{Arctg}x}{1+x^2}\,dx = ?$

15. $\int \frac{\text{Arc Sin}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$

16. $\int (2x+3).\text{Sin}\,(2x^2+6x+1)dx$

17. $\int e^{\text{Sin}x}.\,\text{Cos}x\,dx = ?$

18. $\int \frac{(\ell nx)^2}{x}\,dx$

19. $\int \mathrm{Sin}^4 x \, dx = ?$

20. $\int 6x \, .e^{3x^2+2} \, dx = ?$

21. $\int \frac{\mathrm{Cos}x + e^x}{\mathrm{Sin}x + e^x} \, dx = ?$

22. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = ?$

23. $\int \text{Cos}^4x \,.\, \text{Sin}^3x \, dx$

24. $\int \text{Sin}^6x \,.\, \text{Cos}^5x \, dx$

25. $\int \text{tg}3x \, dx$

26. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$

28. $\int \frac{tgx}{Cos^2x}\,dx$

29. $\int e^x \cdot \mathrm{Sin}e^x \cdot \mathrm{Cos}e^x \, dx$

30. $\int \mathrm{Sin}^3 x \, dx$

31. $\int (x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x+5} \, dx$

32. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x} \, dx$

TRİGONOMETRİK DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME KURALI

A) İntegradında $\sqrt{a^2-x^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmayan fonksiyonların integrallerini hesaplamak için

$x = a.\ Sinu$ ya da $x = a.\ Cosu$

değişken değiştirmesi yapılır. $(O^0 < u < 90^0)$

Örnek : $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = ?$

B) İntegradında $\sqrt{x^2-a^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{x^2-a^2}$ den başka köklü ifade bulunmayan fonksiyonların integralleri için

x = a. Secu ya da x = a.Cosecu deşiken değiştirmesi yapılır.

Örnek : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx = ?$

C) İntegradında $\sqrt{a^2+x^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade bulunmayan fonksiyonların integralleri için $x = a.\tan u$ ya da $x = a.\cot u$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}} = ?$

İntegradında Sin x ve Cosx'in Rasyonel İfadeleri Bulunan İntegralleri Bulma:

$\tan\frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılır. Daha sonra Sinx, Cosx ve dx in de u cinsinden değerlerini hesaplayınız.

Dik üçgen yardımıyla, $\sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ ve $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ olur.

$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}}$ $\boxed{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$ olur. (Yarım açı formülünden)

$u = \tan\frac{x}{2}$ ise $du = \dfrac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$\boxed{dx = \frac{2\,du}{1+u^2} \text{ olur.}}$

Örnek : $\int \frac{1}{1+\sin x}dx = ?$

RASYONEL İFADELERİN İNTEGRALİ

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$Q(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki fonksiyonlara rasyonel fonksiyon denir.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Rasyonel fonksiyonda paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden küçük ise bu kesir basit kesirdir. Eğer paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise, verilen kesrin payındaki polinom paydasındaki polinoma bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile basit kesrin toplamı şeklinde ifade edilir.

Yani, $d\,p(x) \geq d\,Q(x)$ ise,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$ şeklinde yazılır.

Örnek :

$$\frac{x^3-4x^2+x+3}{x^2-x-2} = x-3+\frac{-3}{x^2-x-2}$$

$$\frac{x^4+5x^3+8x^2+5x+1}{x^2+3x+2} = x^2+2x+\frac{x}{x^2+3x+2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int B(x)\,dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)}\,dx$$ integralinde $B(x)$ in integrali kolayca alınabilir.

$\dfrac{K(x)}{Q(x)}$ in integralini almak için bir takım basit kesirlerin toplamı biçiminde yazmamız gerekir. Bu toplamı $T(x)$ ile gösterirsek $Q(x)$ in çarpanlarının durumuna göre :

I. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında (ax+b) gibi birinci dereceden çarpanlar varsa

$\frac{K(x)}{Q(x)}$ kesri $\frac{A}{ax+b}$ terimlerinin dağılımı şeklinde yazılır.

Örnek : $\frac{2x}{(x-1)\ (x+1)}$ ifadesini basit kesirlerine ayıralım.

Çözüm :

$$\frac{2x}{(x-1)\ (x+1)} = \frac{A}{\underset{(x+1)}{x-1}} + \frac{B}{\underset{(x-1)}{x+1}} = \frac{(A+B)\ x+\ A-B}{(x-1)\ (x+1)}$$

2x= (A+B) x+ A-B $\Rightarrow$ Belirsiz katsayılar teoremine göre (Belirsiz katsayılar teoremi iki polinomun eşit olabilmesi için $\Leftrightarrow$ aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 2 \\ A-B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} A+B = & 2 \\ +\ A-B = & +\ 0 \\ \hline 2A = & 2 \end{array} \Rightarrow A = 1 \quad \text{ve} \quad B = 1 \quad \text{dir.}$$

$$\frac{2x}{(x-1)\ (x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \text{ bulunur.}$$

II. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında $(ax+b)^m$ biçiminde olanlar varsa bunların her biri için T(x) toplamında $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$ olarak ifade edebileceğimiz m - terim toplamı bulunur.

Örnek : $\frac{x+1}{(x-1)^3}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm : $\frac{x+1}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{\underset{(x-1)^2}{x-1}} + \frac{A_2}{\underset{(x-1)}{(x-1)^2}} + \frac{A_3}{\underset{(1)}{(x-1)^3}} =$

$x+1 = (x^2-2x+1)\,A_1 + A_2x - A_2 + A_3$

$x+1 = A_1x^2 - 2A_1x + A_1 + A_2x - A_2 + A_3$

$x+1 = A_1x^2 + (-2A_1 + A_2)x + A_1 - A_2 + A_3$

$A_1 = 0,\ A_2 - 2A_1 = 1 \quad ; \quad A_1 - A_2 + A_3 = 1$

$A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2$

$\frac{x+1}{(x-1)^3} = \frac{0}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$ olarak basit kesirlere ayrılır.

III. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında diskriminantı negatif olan her bir (ax^2+bx+c) çarpanı için T(x) toplamında bir tane $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ terimi bulunur.

Örnek : $\frac{x+2}{(x+1)\ (x^2+x+5)}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm :

$\frac{x+2}{(x+1)\ (x^2+x+5)} = \frac{A}{\underset{(x^2+x+5)}{x+1}} + \frac{Bx+c}{\underset{(x+1)}{x^2+x+5}} = \frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{5}x+1}{x^2+x+5}$

$x+2 = Ax^2 + Ax + 5A + Bx^2 + Bx + Cx + C$

$x+2 = (A+B)\,x^2 + (A+B+C)\ x + 5A + C$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = O \\ A+B+C = 1 \\ 5A+C = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C = 1 \\ A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{array}$$

IV. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında bulan her bir $(ax^2+bx+c)^n$ çarpanı için T(x) de,

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$ toplamı bulunur.

Örnek : $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm : $$\frac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2}=\frac{Ax+B}{\underset{(x^2+x+2)}{x^2+x+2}}+\frac{Cx+D}{\underset{1}{(x^2+x+2)^2}}$$

$$2x^2+3=Ax^3+Ax^2+2Ax+Bx^2+Bx+2B+Cx+D$$

$$2x^2+3=Ax^3+(A+B)x^2+(2A+B+C)x+(2B+D)$$

$$\left.\begin{aligned} A&=O\\ A+B&=2\\ 2A+B+C&=O\\ 2B+D&=3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} A&=O\\ B&=2\\ C&=-2\\ D&=-1 \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2}=\frac{2}{x^2+x+2}+\frac{-2x-1}{(x^2+x+2)^2}$$ olarak basit kesirlerine ayrılır.

K(x) in derecesi Q(x) in derecesinden küçük olmak üzere $\displaystyle\int\frac{K(x)}{Q(x)}dx$ integraline örnekler verelim.

Örnek : $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-x}$ ifadesini hesaplayınız.

Örnek :

$\int \frac{2x\,dx}{(x+1)\,(x-2)^2}$ ifadesini hesaplayınız.

Örnek

$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int \frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

KISMİ İNTEGRAL

f, g bir [a, b] aralığında türevli iki fonksiyon olsun.

$(f.g)' = f'.g + g'.f$

$f.g' = (f.g)' - f'.g$

$$\int f(x).\, g'(x)\, dx = f(x)\,.\, g(x) - \int g(x)\,.\, f'(x)\, dx$$

$f(x) = u,\ g(x) = V$ **dersek**

$$\boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du} \ *$$

Örnekler :

1. $\int x\, e^x dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

2. $\int x.\mathrm{Sin}x\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

3. $\int x.\ln x\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

4. $\int e^{x}.\mathrm{Cos}x \; dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

5. $\int \ell n \; x \; dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

6. $\int \mathrm{Arctg}x \; dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

7. $\int \text{Sinx} \cdot \text{Cosx}\ dx$ ifadesini hesaplayınız.

8. $\int x^2\ \text{Cosx}dx$ ifadesini hesaplayınız.

9. $\int x^2 e^x\ dx$ ifadesini hesaplayınız.

BELİRLİ İNTEGRAL

BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

Teorem : f ve g fonksiyonları [a, b] aralığında integrallenebilir iki fonksiyon ve k∈R verilsin.

a) $\int_a^b [(f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k\in R)$

c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad c \in [a, b]$

d) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

e) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

f) x∈ [a, b] için

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

I. Temel Teorem :

f, [a, b] de sürekli ve F, [a, b] de $F(x) = \int_a^b F(t)\,dt$ ile tanımlanmış ise,

[a,b] de F'nin türevi vardır ve $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ dir.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ integrali, türevi f(x)'e eşit olan bir F(x) fonksiyonudur.

F fonksiyonuna f'nin ilkel fonksiyonu; F'yi bulmak için yapılan işleme

f'nin belirsiz integralini alma işlemi denir.

2. Temel Teorem :

f, {a ,b} de sürekli bir fonksiyon, F(x), f(x) in bir ilkeli yani $F' = f(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ dir.}$$

Örnek

$\int_1^3 2x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int_1^3 (3x-2)\,dx = 14$ ve a + b = 6 olduğuna göre, b kaçtır?

Aşağıdaki integralleri hesaplayalım.

$$\int_{1}^{3} (x^2-4x+2)\,dx$$

$$\int_{-1}^{3} (2\text{Sin}x+2\text{Cos}x)\,dx$$

$$S = \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\text{Cos}^2 x}\,dx$$

$$S = \int_{0}^{\pi/2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$S = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

.

$$S = \int_0^1 e^{5x}\, dx$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}\, |x|\, dx$$

Teorem: f: [a,b] $\to$ R sürekli bir fonksiyon ise,

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ile tanımlı;

F: [a,b] $\to$ R ye fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ve $\forall$ x $\in$ (a,b) için,

$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ tir.

1) $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt$ ise

$F'(x) = h'(x) \cdot f(h(x))$ tir.

2) $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ ise

$F'(x) = h'(x) \cdot f(h(x)) - g'(x) \cdot f(g(x))$ tir.

Örnek

$f(x) = \int_2^x e^{t^2+1}dt$ ise, $f'(1)$ kaçtır?

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

f: [a,b] $\rightarrow$ R ye sürekli f fonksiyonu tanımlasın. $\int_a^b |f(x)|dx$ integrali hesaplanırken; önce fonksiyonun [a,b] de işareti incelenir. Fonksiyonun işaretine göre aralıklarda integralin değeri bulunur.

Örnek

$\int_2^5 |x-4|dx$ integralinin değeri nedir?

Örnek

$\int_{\pi/6}^{\pi} |\cos x|dx$ integralinin değeri nedir?

Örnek

$\int_{-2}^{3} |x|\ dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

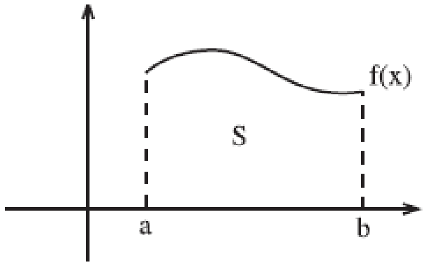
$\int_0^2 |x-1|\, dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$\int_0^3 |x^2-3x+2|\, dx$

EĞRİLERLE SINIRLI DÜZLEMSEL BÖLGELERİN ALANLARININ BULUNMASI

f, [a, b] de sürekli bir fonksiyon olsun f nin eğrisi x=a, x=b doğruları ve x-ekseni ile alan ; $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$ dir.

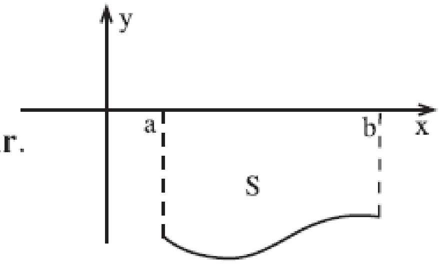


Alan, x- ekseninin üstünde ise

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)\,dx$ dir.

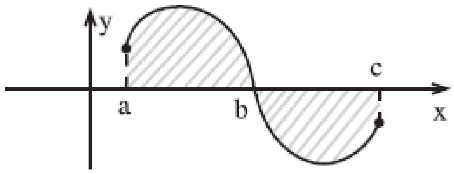
Alan, x- ekseninin altında ise

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0 \Rightarrow S = -\int_a^b f(x)\,dx$ dir.



Alan, x ekseninin hem altında hem de üstünde ise f, [a,c] de sürekli,

$\forall\ x \in [a, c]$ alan $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$ dir.



Örnekler :

1. f(x)= 2x doğrusu x-ekseni x=1 ve x= 2 doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

2. $f(x) = \frac{x^2}{4}$ eğrisi, x-ekseni, x=1 ve x=4 doğrularıyla sınırlanan alanı bulunuz.

3.

f(x) = Sinx eğrisinin [0, π] aralığında kalan parçası ve x- ekseni ile sınırlanan alanı hesaplayınız.

4.

$\int_{-2}^{3} |x|\, dx$ integralini hesaplayınız.

5. f : R → R ; $f(x) = x^2+x - 6$ eğrisi, x = -2, x = 1 doğruları ve x- ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

6.

f: (x) = $-x^2+7x-6$ fonksiyonunun eğrisi x = 2, x=5 doğruları ve x-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

7.

f(x) = x^2 -8x fonksiyonunun eğrisine x -ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8.

f(x) =Sinx fonksiyonunun eğrisi ile $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{4}$ doğruları ve x- ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Örnek

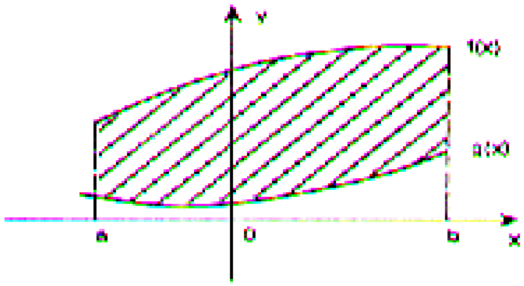
$f(x) = x^2 + 2$ eğrisi x ve y eksenleri ile $x = 2$ doğrusu tarafından sınırlanan düzlemsi bölgenin alanı kaç br^2 dir?

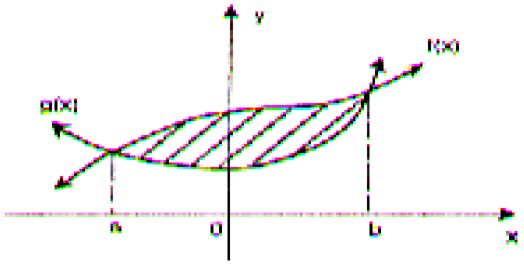
Örnek

$f(x) = x^3 - 4x$ eğrisinin x ekseniyle sınırladığı düzlemsel bölgenin alanları toplamı kaç br^2 dir?

İKİ EĞRİ TARAFINDAN SINIRLANAN DÜZLEMSEL BÖLGELERİN ALANLARI

f(x) ve g(x) fonksiyonları [a,b] aralığında sürekli ve f(x) > g(x) olsun.





Bu eğriler tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı;

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad \text{tir.}$$

Örnekler :

1. y = x doğrusu ve $y = \frac{x^2}{2}$ parabolünün sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

2. $y = x^2$, $y = -x^2+2x$ fonksiyonlarının eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

3. $y = 2x^2$ eğrisi ve $y = 4x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

4. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında, $y = \text{Sin}x$, $y = \text{Cos}x$ eğrileri ve x- ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $y^2 = 3x$ ve $x^2 = 3y$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

6. $y = x^2 - 1$ eğrisi ve $y = x - 1$ doğrusunun sınırlandığı bölgenin alanını bulunuz.

7. $y = x^2 - 8$ ve $y = -x^2$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8.

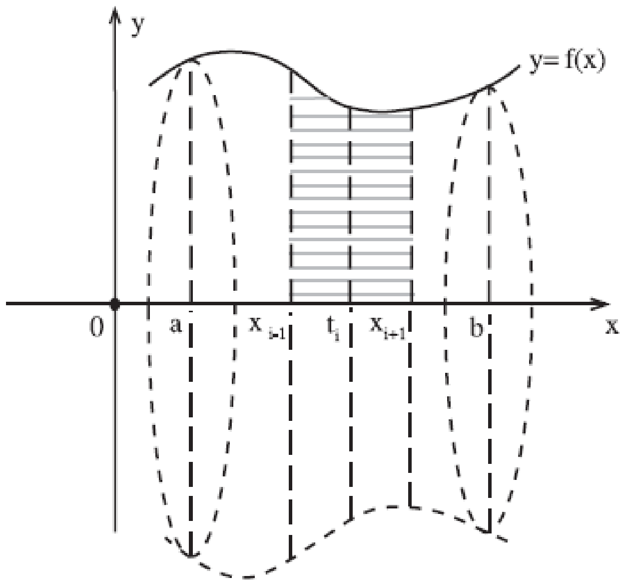
$y = x^2$ eğrisi ile $y = 2x$ doğrusu arasındaki alanı bulunuz.

9. $f(x) = -x^2 - x + 2$ ve $g(x) = 2x + 2$ eğrileri arasında kalan taralı alanı bulunuz.

10. $f(x) = -x^2 + 4x$ ve $g(x) = x^2 + 2x$ eğrilerinin sınırlandığı alanı bulunuz?

DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİNİN BULUNMASI

[a, b] aralığında integrallenebilen bir f fonksiyonunu ele alalım. f nin grafiği; x- ekseni x = a ve x = b doğruları ile sınırlanan bölgeyi x - ekseni etrafında döndürmekle oluşturan cisme dönel cisim denir.



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{bulunur.}$$

[a, b] aralığında integrallenebilen bir x=g (y) fonksiyonu y ekseni y=a ve y=b doğruları ile sınırlanan bölgeyi y ekseni etrafında döndürmekle oluşturan cismin hacmi,

$$V = \pi \int_a^b [\ g(y)]^2\ dy \Rightarrow V = \int_a^b x^2 dy \quad \text{bulunur.}$$

Örnekler :

1. $y = x$ doğrusu, $x = 3$ doğrusu ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin x - ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel hacmini bulunuz.

2. $y = \sqrt{x}$ eğrisi $y=2$ doğrusu ve y - ekseni ile sınırlanan bölgenin y - eksen etrafından döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

3. $y = \mathrm{Cos}x$ fonksiyonunun eğrisi $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin x - eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.

4. $y = x^2$ nin eğrisi, $y = 1$, $y = 4$ doğrusu ve y - ekseni ile sınırlanan bölge y - ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.

5. $y = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği, $y = 0$, $y = 3$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin, x-ekseni etrafından döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.

6. $y = x^2 + 1$ parabolünün oy ekseni etrafında 360^0 dönmesinden [2,4] aralığında oluşan cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEKLER

1. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$ ifadesini hesaplayınız.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}^2 x dx$ ifadesini hesaplayınız.

3. $\int_{0}^{\pi/2} \text{Sin}^2 x \, dx$ ifadesini hesaplayınız.

4. $\int x(x^2+1)^4 dx$ ifadesini hesaplayınız.

5. $\int (x+1)\ (x^2+2x-1)^4$ ifadesini hesaplayınız.

6. $\int_1^e \frac{\sqrt{1nx}}{x}\,dx$ ifadesini hesaplayınız

7. $\int \frac{Cos^2 y}{1-Siny}\,dy$ ifadesini hesaplayınız.

8. $\int \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}x\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

9. $\int e^{x} . \mathrm{Sin}e^{x}$ ifadesini hesaplayınız.

10. $\int x.\,(x+1)^{2}\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

11. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$ ifadesini hesaplayınız.

12. $\int \frac{dt}{9t^2-16}$ ifadesini hesaplayınız.

13. $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-3e^x+2}$ ifadesini hesaplayınız.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}$ ifadesini hesaplayınız.

15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ ifadesini hesaplayınız.

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ ifadesini hesaplayınız.

17. $\int x\sqrt{16-x^2}\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

18. $\int \frac{\text{Sin}2x}{\text{Sin}^2x+5}\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

19. $\displaystyle\int \frac{(1-t^2)dt}{t(1+t^2)}$ ifadesini hesaplayınız.

20. Aşağıda verilen eğri ve doğrularla sınırlanan alanları bulunuz.

a) $y = (2x+1)^2$ eğrisi $x = 1$, $x = 3$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan alanı bulunuz.

b) $y = x^2$ eğrisi ile $y = 2x$ doğrusu arasındaki alanı bulunuz.

c) $y = x^2+4$ eğrisi ile $y= x+6$ doğrusu arasındaki sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

d) $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $(x>0)$, $x = 1$; $x = e^2$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgeninalanını bulunuz.

DEĞERLENDİRME TESTİ

1. $\int xe^x\,dx$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x(x-1)+c$ B) $e^x(x+1)+c$ C) $e^x+xe^{x^2}$ D) e^x+1+c

2. $\int \frac{dx}{x^2+x}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ell n\,|x| + x+1$ B) $\ell n\,|x| + |x+1|$ C) $\ell n\,|x| - |x+1| +c$ D) $\ell n\,|x| - |x+1|$

3. $\int \frac{dx}{x(x-3)}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| + \frac{1}{3}\ell n\,|x+3| +c$ B) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| - \frac{1}{3}\ell n\,|x-3| +c$

C) $-\frac{1}{3}\ell n\,|x| + \frac{1}{3}\ell n\,|x-3| +c$ D) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| + |x+3| +c$

4. $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu Ox ekseni ile sıralanan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{32}{3}$ B) 10 C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{19}{3}$

5. $f(x) = x(x^2-9)$ fonksiyonunun $x = -3$, $x = 5$, $y = 0$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 100 B) 102 C) $\frac{208}{3}$ D) $\frac{209}{2}$

6. $\int \frac{3x-5}{x^2+9}\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$

B) $\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{3} + \ln(x^2+9)$

C) $\arctan x + \ln(x^2+9)$

D) $\frac{5}{3}\arctan x - \ln(x^2+9)$

7. $\int \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\ln|x+1| - \ln|x-1| + c$

B) $-\ln|x| + 2\ln|x+1| + c$

C) $\ln|x+1| + \ln|x-1| + c$

D) $\ln|x| + 1 + c$

8. $y = x^3 - x$ eğrisi ile Ox ekseni arasındaki bölgenin Ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacimi kaç br^3 dür?

A) $\frac{16\pi}{103}$ B) $\frac{15\pi}{104}$ C) $\frac{16\pi}{108}$ D) $\frac{16\pi}{109}$

9. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 6$ ile sınırlanıp Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacimi kaç br^3 dür?

A) $\frac{481\pi}{5}$ B) $\frac{483\pi}{6}$ C) $\frac{486\pi}{5}$ D) $\frac{489\pi}{5}$

10. $\int e^x . \mathrm{Sin}x\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x(\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x)$

B) $e^x\frac{(\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x)}{2}$

C) $e^x\frac{(\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}x)}{2}$

D) $\frac{e^x(\mathrm{Sin}x - \mathrm{Cos}x)}{2}$

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$

$u = x \qquad dv = e^x\,cdx$

$du = dx \qquad v = e^x$

Doğru Cevap A

2. $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{\underset{(x+1)}{x}} + \dfrac{B}{\underset{(x)}{x+1}}$

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{Ax+A+bx}{x(x+1)}$

$1 = (A+B)\,x + A$

$A = 1, \quad A+B = 0$

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$B = -1$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ell n\,|x| - \ell n\,|x+1| + c$$

Doğru Cevap C

3. $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-3}$

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} = \frac{(A+B)\,x - 3A}{x(x-3)}$$

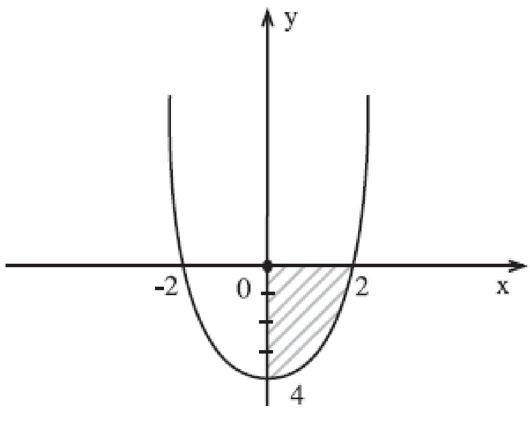
$A+B = 0$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$ o halde, $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{x} + \dfrac{\frac{1}{3}}{x-3}$

$$\int \frac{dx}{x(x-3)} = \int \left(\frac{\frac{-1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right) dx = -\frac{1}{3}\ \ell n\,|x| + \frac{1}{3}\,\ell n\,|x-3| + c$$

Doğru Cevap C

4. $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunu 0x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını,



$$A = \int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}\ br^2$$

Doğru Cevap A

5. $f(x) = x\,(x^2-9)$ fonksiyonunun $x = -3$, $x=5$, $y=0$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanı

$$x\,(x^2-9) = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = 9$$

$$A = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

$$A = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left.\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3} + \left.\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{3}^{5}$$

$$A = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{256}{4} = \frac{418}{4} = \frac{209}{2}\ br^2$$

Doğru Cevap D

6. $$\int \frac{3x-5}{x^2+9}\,dx = \int \frac{3x\,dx}{x^2+9} - \int \frac{5dx}{x^2+9}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} - 5\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\,\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{3} + c$$

Doğru Cevap A

7. $$\int \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}\right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x+1| + c$$

Doğru Cevap B

8. $y = x^3 - x$, 0x ekseni etrafında sınırlanıp 0x etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacimi,

$x.(x^2-1)$

$x = 0 \quad x = \pm 1$

-1 ile 0 arası bölge, 0 ile +1 arasındaki bölge ile simetrik olduğundan hacim formülünde 2 çarpanı alınmalıdır.

$$V = 2\pi \int_0^1 y^2\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x)^2\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2)\,dx = 2\pi \,.\, \frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$V = 2\pi\ (\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}) = 2\pi\ (\frac{8}{105}) = \frac{16\pi}{108}\ br^3$$

Doğru Cevap C

9. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 6$ ile sınırlanıp 0y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacimi.

$$V = \pi \int_0^6 x^2\,dy = \pi \int_0^6 (\frac{y^2}{4})^2\,dy = \pi \int_0^6 \frac{1}{16} y^4\,dy$$

$$V = \frac{\pi}{16} \int_0^6 y^4\,dy = \frac{\pi}{16}\ \frac{y^5}{5} \Big|_0^6 = \frac{\pi}{80}\ (6^5 - 0)$$

$$= \frac{486\pi}{5}\ br^3$$

Doğru Cevap C

10. $A = \int e^x \,Sinx\,dx = e^x\,Sinx - \int e^x\,Cosx\,dx$

$A = e^x\,Sinx - e^x\,Cosx - \int e^x\,Sinx\,dx$

$2A = e^x\,Sinx - e^x\,Cosx$

$$A = \frac{e^x\,(Sinx\ -\ Cosx)}{2}$$

Doğru Cevap B